UNIVERSITÉ CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR

❐❐◆❐❐

OFFICE DU BACCALAUREAT
E.mail : office@ucad.edu.sn

site web : officedubac.sn

21T37AR01A8

Durée : 4 heures

Série : G – Coef. 5

Série : STEG – Coef. 4

Epreuve du 1er groupe

MATHEMATIQUES

EXERCICE 1 (05 points)

On considère la suite numérique définie par son premier terme $U_0 = 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = \frac{U_n}{U_n+3}$.

1) Calculer U_1 et U_2. **(0,5+0,5 point)**
2) Soit (V_n) la suite numérique définie par:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad V_n = \ln\left(\frac{U_n}{U_n+2}\right).$$

   a. Montrer que (V_n) est une suite arithmétique de raison $r = -\ln 3$ puis préciser son premier terme. **(01 point)**
   b. Exprimer V_n puis U_n en fonction de n. **(02 points)**
   c. Exprimer $S_n = V_0 + V_1 + \ldots + V_n$ en fonction de n. **(01 point)**

EXERCICE 2 (05 points)

Soit la matrice A définie par:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que la matrice A est inversible. **(01 point)**
2) Calculer A^2. **(01 point)**
3) Déterminer A^{-1} la matrice inverse de A par la méthode du pivot de Gauss. **(02 points)**
4) En déduire les solutions du système **(01 point)**

$$\begin{cases} -y + 2z = 0 \\ 2x + 3y + 6z = 10 \\ 3x + y + 4z = 3 \end{cases}$$

PROBLEME (10 points)

PARTIE A

Soit la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = 1 + 2x^2 - \ln x$.

1) Calculer $g'(x)$ fonction dérivée de g . **(0,5 point)**
2) Dresser le tableau de variation de g. **(01 point)**
3) En déduire que $\forall\, x > 0,\ g(x) > 0$. **(0,5 point)**

PARTIE B

Soit la fonction f définie par : $f(x) = 2 - 2x + \frac{1}{x}\ln\left(\frac{1}{x}\right)$

1) Préciser l'ensemble de définition de f. On le noera D_f **(0,5 point)**
2) Calculer les limites de $f$aux bornes de D_f**.** **(01 point)**
3) Montrer que pour tout x appartenant à D_f, $f'(x) = \frac{-g(x)}{x^2}$ **.** **(01+0,5 point)**
4) Dresser le tableau de variation de f. **(0,75 point)**
5) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = -2x + 2$ est asymtote à (C_f) courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité 1cm**.** **(0,5 point)**
6) Etudier la position relative de (C_f) par rapport à (Δ). **(0,5 point)**
7) Déterminer l'équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'intersection de (C_f) et de (Δ). **(0,5 point)**
8) a. Montrer que la fonction f est bijective de $]0; +\infty[$ vers un intervalle J à préciser. **(0,75 point)**
   b. On note f^{-1} la bijection réciproque de f. Calculer $f(1)$ puis $(f^{-1})'(0)$. **(0,25+0,75 point)**
9) Tracer dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, la courbe (C_f) puis $(C_{f^{-1}})$ courbe représentative de f^{-1}. **(01 point)**