

Pays : Sénégal	Année : 2017	Épreuve : Mathématiques
Examen : BAC, Séries S1-S3	Durée : 4 h	Coefficient : 8

EXERCICE 1 (05 points)

ABCEDFGH est un cube d'arête 1. On rapporte l'espace au repère orthonormé direct $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1. a) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BD} \wedge \overrightarrow{BG}$.
b) En déduire une équation cartésienne du plan (BGD).
c) Vérifier que la droite (EC) est orthogonale au plan (BGD).

2. Donner une équation de la sphère (S) de centre C et tangente au plan (BGD).

3. À tout α appartenant à l'intervalle $[0 ; 1]$ on associe le point M de coordonnées $(\alpha, \alpha, 1 - \alpha)$.

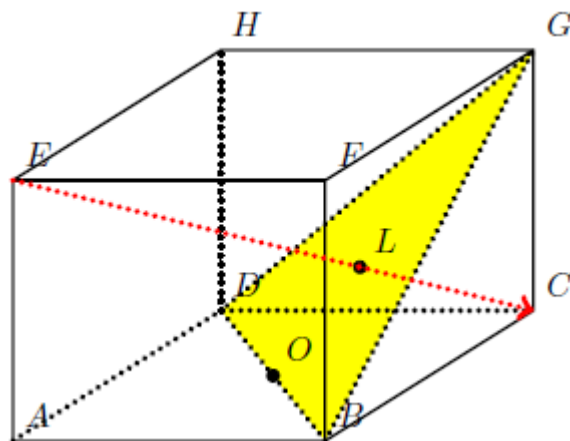
- a) Montrer que M est un point du segment [EC].
b) Montrer que la distance du point M à la droite

(BD) est égale à $\sqrt{3\alpha^2 - 4\alpha + \frac{3}{2}}$.

- c) Déterminer α pour que la distance de M à la droite (BD) soit minimale.
Soit L le point associé à cette valeur de α .
d) Vérifier que L est le centre de gravité du triangle BGD.

4. Soit h l'homothétie de centre E et de rapport $k \in [0 ; 1]$.

- a) Donner l'expression analytique de h .
b) Vérifier que : $h(C) = M$.
c) Déterminer une équation de (S') image de (S) par h .



EXERCICE 2 (04 points)

Soit a un entier naturel non nul et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_n = \text{pgcd}(n, a)$.

1. a) Pour $a = 15$, calculer les 3 premiers termes de la suite (u_n) .
b) Pour $a = 4$, soient m et n des entiers naturels tels que : $u_m = u_n = 2$.
Montrer que : $u_{m+n} = 4$.
2. a) Soit b un entier naturel.
Démontrer que pour tout entier relatif q , on a : $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(a, b - qa)$.
b) Calculer u_0 et u_a .
c) Démontrer que : $u_{n+a} = u_n$.
Quelle propriété de la suite (u_n) a-t-on mise en évidence ?
3. Pour $a = 15$, calculer u_n avec $n = 15^{21} + 2$.

PROBLÈME (11 points)

Le plan orienté $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 4 cm).
 n étant un entier naturel non nul, on s'intéresse aux solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation d'inconnue x , $(E_n) : x + e^x - n = 0$.

Soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = x + e^x - n$.

On note C_{f_n} la courbe représentative de f_n dans le repère.

Partie A

1. a) Vérifier que pour tout réel x strictement positif, $\ln(x) - x < 0$.

b) Montrer que l'équation (E_n) possède une solution unique u_n et que u_n appartient à l'intervalle $]\ln \frac{n}{2} ; \ln(n)]$.

c) En déduire la limite en $+\infty$ de : u_n ; $\frac{u_n}{n}$ et $\frac{u_n}{\ln(n)}$.

2. Dans cette question et celles qui suivent, on pourra au besoin se servir de l'équivalence suivante : $\forall x \in \mathbb{R}, x + e^x - n = 0 \Leftrightarrow e^x = n - x$.

a) Calculer la limite en $+\infty$ de $\frac{e^{u_{n+1}}}{e^{u_n}}$.

Montrer alors que $(u_{n+1} - u_n)$ a pour limite 0.

b) À l'aide des variations de l'application f_n , étudier celles de la suite (u_n) .

c) On note A_n l'aire du domaine plan délimité par les droites d'équations $x = u_{n+1}$, $x = u_n$, l'axe des abscisses et la courbe C_{f_n} .

Montrer que : $A_n = \frac{1}{2}(u_{n+1}^2 - u_n^2) - (n+1)(u_{n+1} - u_n) + 1$.

d) Vérifier que pour tout x appartenant à l'intervalle fermé d'extrémités u_{n+1} et u_n , on a : $0 \leq f_n(x) \leq 1$. En déduire la limite de A_n .

3. a) En utilisant la définition de la dérivée d'une fonction en un point, vérifier qu'il existe une fonction ε définie dans un intervalle ouvert contenant 0 telle que pour tout h dans cet intervalle, on ait : $\ln(1+h) = h + h\varepsilon(h)$

$$\text{et } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$$

b) On pose : $\alpha_n = \frac{u_n}{\ln(n)} - 1$, c'est-à-dire : $u_n = \ln(n) + \alpha_n \ln(n)$.

Quelle est la limite de α_n ?

c) Déterminer une suite (y_n) telle que : $u_n = \ln(n) + \ln(1 + y_n)$.

Déduire alors de la question 3. a) qu'il existe une suite β_n ayant pour limite 0 telle que :

$$u_n = \ln(n) - \frac{\ln(n)}{n} + \beta_n \frac{\ln(n)}{n}.$$

Partie B

Dans cette partie, on s'intéresse à u_2 .

D'après la première partie, u_2 appartient à l'intervalle $[0 ; \ln 2]$.

On note g l'application de $[0 ; 1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in [0 ; 1], g(x) = \ln(2 - x)$ et on pose $b = \frac{2}{3} \ln 2$ et $a = g(b)$.

1. a) Montrer que u_2 est le seul point fixe de g et que u_2 appartient à l'intervalle $I = [a ; b]$.
b) Prouver que g est dérivable sur I et $\forall x \in I, |g'(x)| \leq |g'(b)|$.
Énoncer clairement le théorème qui permet d'en déduire que :
 $\forall x, y \in I, |g(x) - g(y)| \leq |g'(b)| |x - y|$.
c) Vérifier que : $g(I) \subset I$.
2. On pose, $a_0 = b$ et pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = g(a_n)$.
a) Démontrer que la suite (a_n) est bien définie (c'est-à-dire démontrer que pour tout entier naturel n , a_n appartient à l'ensemble de définition de g) et que pour tout entier naturel n , a_n appartient à I .
b) Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n - u_2| \leq |g'(b)|^n (b - a)$.
En déduire que la suite (a_n) est convergente et calculer sa limite.
c) Quelle valeur suffit-il de donner à n pour que a_n soit une valeur approchée de u_2 à 10^{-3} ?
3. Représenter sur un même graphique, les restrictions de g et f_2 à l'intervalle $[0 ; 1]$, le domaine A_2 , la droite d'équation $y = x$, les points de coordonnées respectives $(a, 0)$, $(b, 0)$, $(u_2, 0)$, $(u_3, 0)$.