UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR

OFFICE DU BACCALAUREAT
BP 5005-DAKAR-Fann-Sénégal
Serveur Vocal : 628 05 59
Téléfax (221) 33 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

20 G 26 B 01
2 heures
Série S2-S2A-S4-S5
Coef 5

Epreuve du 2^{nd} groupe

M A T H E M A T I Q U E S

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées.
Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites.
Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF.Circulaire n^0 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

Exercice 1 (**10 points**). Plusieurs réponses peuvent être exactes. Choisir les bonnes réponses en les justifiant. Chaque réponse juste est notée (**1 point**) et chaque réponse fausse (**0 point**).

1. Soit f une fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ telle que $\dfrac{f(x)}{2x^2+3} = 1$. Alors on peut conclure que :

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2x^2+3$, **b.** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$,

c. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$, **d.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \Big(f(x) - 2x^2\Big) = 1$.

2. Soit la suite $\Big(U_n\Big)$ définie par $U_0 = 3$ et $U_{n+1} = 2U_n - 1$. Alors on peut conclure que :

a. la suite $\Big(U_n\Big)$ converge vers 0, **b.** la suite $\Big(W_n\Big)$ définie par $W_n = U_n - 1$ est géométrique,

c. la suite $\Big(U_n\Big)$ est bornée, **d.** la suite $\Big(V_n\Big)$ définie par $V_n = \ln\Big(U_n - 1\Big)$ est arithmétique.

3. Une urne contient 6 jetons blancs et 4 jetons noirs. On tire un jeton 10 fois de suite avec remise. On note X la variable aléatoire égale au nombre de jetons noirs obtenus à l'issue des 10 tirages. Alors on peut conclure :

a. X est une loi binomiale de paramètre 10 et $\dfrac{2}{5}$, **b.** $P(X=0) = \dfrac{1}{2^{10}}$,

c. $P(X \leq 7) = 1 - P(X \geq 7)$, **d.** $E(X) = 4$.

4. Soit $z' = \dfrac{2z-1}{z+i}$ avec $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$. Alors on peut conclure que l'ensemble des points $M(z)$ tels que $|z'| = 1$:

a. est un cercle passant par l'origine, **b.** est une droite,

c. est une droite privée d'un point, **d.** est un cercle privée d'un point.

5. Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on pose $I_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} \left(2\dfrac{\ln t}{t}\right) dx$. Alors on peut conclure que :

a. pour tout $n \geq 1$, $I_n = 2n+1$, **b.** la suite $\left(\dfrac{I_{n+1}}{I_n}\right)$ a pour limite 2.

c. pour $k \geq 1$, $I_1 + I_2 + I_3 + \cdots + I_k = k^2 + 2k$, **d.** $\lim\limits_{n\to+\infty} \Big(I_{n+1} - I_n\Big) = 0$.

Exercice 2 (**10 points**).

On considère une fonction numérique f d'une variable réelle x. La droite (Δ) d'équation $y = 3x + 1$ est une tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse $x = 2$.

1. a. Déterminer $f'(2)$. **1pt**

b. Calculer $f(2)$. **1,5pt**

c. Sachant que $f(x) = a\ln(\frac{x}{2}) + b$, déterminer a et b. **2pts**

2. Soit g la fonction numérique d'une variable réelle x définie par $g(x) = f(x^2 + 1)$.

On note (C_g) la courbe représentative de g et P un point de (C_g) d'abscisse $x = 1$.

a. Montrer que la tangente (Δ') à (C_g) au point P a pour coefficient directeur 6. **1pt**

b. Donner l'équation cartésienne de (Δ'). **1,5pts**

c. Montrer que $g(x) = 6\ln(\frac{x^2+1}{2}) + 7$. **1pt**

3. Donner les coordonnées du point d'intersection de (Δ) et (Δ'). **2pts**

UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR
OFFICE DU BACCALAUREAT
BP 5005-DAKAR-Fann-Sénégal
Serveur Vocal : 628 05 59
Téléfax (221) 33 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

2020 G 26 A 01
4 heures
Série S2-S2A-S4-S5
Coef 5

Epreuve du 1^{er} groupe

M A T H E M A T I Q U E S

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées.
Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites.
Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF.Circulaire n^0 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

Exercice 1 (07 points).
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Partie A

1. Soient z et z' deux nombres complexes. Compléter les propriétés sur les modules et arguments suivantes :

a. $|z^n| = ...$; **b.** Si z' non nul, alors $|\frac{z}{z'}| = ...$; **$(0,25 + 0,25)$ pt**

c. $\arg(z^n) = ...$, n un entier naturel ; **d.** Si z' non nul, alors $\arg(\frac{z}{z'}) = ...$ **$(0,25 + 0,25)$ pt**

2. Soient A, B, C et D des points du plan deux à deux distincts, d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D. Donner l'interprétation géométrique de :

a. $|z_B - z_A|$; **b.** $\arg(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_C})$. **$(0,25 + 0,25)$ pt**

3. Rappeler la formule de Moivre. **$0,5$ pt**

Partie B

Soit s une transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = a^3z + a^2$, où $a \in \mathbb{C}$.

1. On donne $a = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de s. **2 pts**

2. Déterminer les nombres complexes a pour lesquels :

a. s est une translation. **1 pt**

b. s est une rotation d'angle $\frac{3\pi}{2}$. **1 pt**

c. s est une homothétie de rapport -8. **1 pt**

Exercice 2 (03 points).

1. On dispose de deux dés cubiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On lance simultanément les deux dés et on s'intéresse à la somme S des chiffres apparus sur la face de dessus.

a. Déterminer les valeurs possibles de S. **$0,5$pt**

b. Déterminer la probabilité d'obtenir une somme égale à 9. **$0,5$pt**

2. Marame et Birane disposent chacun de deux dés et s'adonnent au jeu précédent, chacun de son côté.

a. Quelle est la probabilité que chacun affiche un même score de 9, 7 ou 8 ? **0,75pt**

b. Quelle est la probabilité qu'ils affichent le même score. **0,5pt**

c. Celui qui affiche le plus grand score gagne. Calculer la probabilité pour que Marame gagne. **0,75pt**

PROBLEME (10 points).

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} x+1+\dfrac{3e^x}{e^x+2} & si \;\; x \leq 0 \\ x+2+\dfrac{\ln(x+1)}{x+1} & si \;\; x > 0 \end{cases}$$

et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ d'unité graphique $1cm$.

1. Etablir que f est définie sur $\mathbb{R}$. **0,5 pt**

2. a. Etudier la continuité de f en 0. **0,75 pt**

b. Pour $x < 0$, montrer que $\dfrac{f(x)-2}{x-0} = 1 + \dfrac{2(e^x-1)}{x} \times \dfrac{1}{(e^x+2)}$. **0,5 pt**

En déduire $\displaystyle\lim_{x \to 0,\, x<0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$. **0,25 pt**

c. Conclure sur la dérivabilité de f en 0 et interpréter graphiquement les résultats. **0,5 pt**

3. a. En utilisant les variations de la fonction h définie par $h(x) = \ln(x) - x$, montrer que $\ln(x) < x$ pour $x > 0$. **0,5pt**

En déduire que $\ln(x+1) < (x+1)^2$ pour $x > 0$. **0,5pt**

b. Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$ et utiliser **3.a.** pour déterminer son signe. **(0,5 + 0,5) pt**

c. Calculer $f'(x)$ pour $x < 0$ et donner son signe. **(0,5 + 0,25) pt**

4. a. Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition $\mathcal{D}_f$. **0,5 pt**

b. Calculer $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (x+1)]$ et interpréter graphiquement le résultat. **(0,25 + 0,25) pt**

c. Calculer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (x+2)]$ et interpréter graphiquement le résultat. **(0,25 + 0,25) pt**

d. Etudier le signe de $f(x) - (x+1)$ pour $x < 0$, montrer que $f(x) - (x+2) > 0$ pour $x > 0$ et interpréter graphiquement les résultats. **(0,25 + 0,25 + 0,25) pt**

5. Déterminer les coordonnées du point A de la courbe où la tangente est parallèle à l'asymptote pour $x > 0$. **0,25 pt**

6. Etablir que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à préciser. **0,5 pt**

7. Représenter graphiquement les courbes de f et f^{-1} dans un même repère. **1 pt**

8. Calculer $\displaystyle\int_{-\ln 3}^{0} \Big(f(x) - (x+1)\Big)dx$. **0,5 pt**

9. Interpréter le résultat précédent en terme d'aire. **0,25 pt**

Pays : Sénégal	**Année** : 2017	**Épreuve** : Mathématiques
Examen : BAC, 1er Gpe, Séries S2	**Durée** : 4 h	**Coefficient** : 5

EXERCICE 1 (04 *points*)

1. On considère l'équation (E) : $z^3 - 13z^2 + 59z - 87 = 0$, où z est un nombre complexe.

a) Déterminer la solution réelle de (E).

b) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation (E).

2. On pose : $a = 3$, $b = 5 - 2i$ et $c = 5 + 2i$.

Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives a, b et c. Soit M le point d'affixe z distinct de A et de B.

a) Calculer $\frac{b-a}{c-a}$. En déduire la nature du triangle ABC.

b) On pose : $Z = \frac{z-3}{z-5+2i}$.
Donner une interprétation géométrique de l'argument de Z.
En déduire l'ensemble des points M d'affixe z tels que Z soit un nombre réel non nul.

3. Soit (C) le cercle circonscrit au triangle ABC et I le point d'affixe $2 - i$.

a) Donner l'écriture complexe de la rotation r de centre I et d'angle $\frac{-\pi}{2}$.

b) Déterminer l'image (C') de (C) par r. Construire (C').

EXERCICE 2 (06 *points*)

A l'occasion de ses activités culturelles, le FOSCO d'un lycée organise un jeu pour le collectif des professeurs. Une urne contenant 4 boules rouges et une boule jaune indiscernables au toucher est placée dans la cour de l'école. Chaque professeur tire simultanément 2 boules de l'urne.

- Si les 2 boules sont de même couleur, il les remet dans l'urne et procède à un second tirage successif avec remise de 2 autres boules.

- Si les 2 boules sont de couleurs distinctes, il les remet toujours dans l'urne, mais dans ce cas le second tirage de 2 autres boules s'effectue successivement sans remise.

1. Calculer la probabilité des évènements suivants :

A : « Le professeur tire 2 boules de même couleur au premier tirage. »

B : « Le professeur tire 2 boules de couleurs distinctes au premier tirage. »

C : « Le professeur tire 2 boules de même couleur au second tirage sachant que les boules tirées au premier tirage sont de même couleur. »

D : « Le professeur tire 2 boules de même couleur au second tirage sachant que les boules tirées au premier tirage sont de couleurs distinctes. »

E : « Le professeur tire 2 boules de couleurs distinctes au second tirage sachant que les boules tirées au premier tirage sont de couleurs distinctes. »

F : « Le professeur tire 2 boules de couleurs distinctes au premier et au second tirage. »

2. Pour le second tirage, chaque boule rouge tirée fait gagner au FOSCO 1 000 F et chaque boule jaune tirée fait gagner au collectif des professeurs 1 000 F.

Soit X la variable aléatoire à laquelle on associe le gain obtenu par le FOSCO.

a) Déterminer les différentes valeurs prises par X et sa loi de probabilité.
b) Déterminer la fonction de répartition de X.

3. Étant donné que le collectif est composé de 50 professeurs qui ont tous joué indépendamment et dans les mêmes conditions, déterminer la probabilité des évènements suivants :

G : « Le FOSCO réalise un gain de 100 000 F. »

H : « Le collectif des professeurs réalise un gain de 100 000 F. »

I : « Le FOSCO réalise autant de gains que de pertes. »

PROBLÈME (10 *points*)

Partie A

Soit g la fonction définie par : $g(x) = -2\ln(x+1) + \frac{x}{x+1}$.

1. *a*) Déterminer D_g, puis calculer les limites de g aux bornes de D_g.

b) Calculer $g'(x)$, étudier son signe et dresser le tableau de variations de g.

2. *a*) Calculer $g(0)$.

Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions dont l'une notée α appartient à l'intervalle $]-0{,}72\ ;\ -0{,}71[$.

b) Déterminer le signe de $g(x)$.

Partie B

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2}{\ln(x+1)} \ si\ x > -1\ et\ x\ \neq 0 \\ f(x) = (1+x)e^{-x-1}\ si\ x \leq -1 \\ f(0) = 0 \end{cases}.$$

1. *a*) Montrer que $D_f = \mathbb{R}$ et calculer les limites de *f* aux bornes de D_f.

b) Étudier la nature des branches infinies.

2. *a*) Étudier la continuité de *f* en – 1 et en 0.
b) Étudier la dérivabilité de *f* en – 1 et en 0 et interpréter graphiquement les résultats.

3. *a*) Montrer que pour tout *x* ϵ]- 1, +∞[et $x \neq 0$, on a : $f'(x) = \frac{-xg(x)}{ln^2(x+1)}$.

Calculer $f'(x)$ sur]- $\infty, -1$[.

b) Étudier les variations de *f* et dresser son tableau de variations.

4. Soit *h* la restriction de *f* à [0, +∞[.

a) Montrer que *h* réalise une bijection de [0, +∞[sur un intervalle J à préciser.

b) Donner le sens de variation de h^{-1}.

c) Construire C_f et $C_{h^{-1}}$.

Partie C

Soit *m* la fonction définie par : $m(x) = \frac{\ln(x+1)}{x^2} - \frac{1}{x(x+1)}$.

1. Déterminer les fonctions *u* et *v* telles que pour tout *x* ϵ]0, +∞[, on ait :
m(*x*) = $u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.

2. *a*) En déduire la fonction H définie sur]0, +∞[et telle que : $H'(x) = m(x)$.

b) Calculer $\int_1^2 \frac{1}{f(x)} dx$.

Pays : Sénégal	**Année :** 2014	**Session :** normale, 1er Groupe
Série : BAC, série S_2	**Durée :** 4 h	**Coefficient :** 5

Exercice 1

A) Questions de cours

1. Rappeler les formes algébrique, exponentielle et trigonométrique d'un nombre complexe z non nul.

2. Donner l'écriture complexe de la rotation r de centre $K(z_0)$ et d'angle θ.

B) On donne $z_0 = 1 - i\sqrt{3}$.

1. Donner une écriture trigonométrique de z_0.

2. Montrer que : $z_0^4 = -8 + 8i\sqrt{3}$.

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = 1$.

4. En déduire les solutions de (E) : $z^4 = -8 + 8i\sqrt{3}$ sous la forme algébrique et sous forme trigonométrique.

On peut remarquer que (E) équivaut à $\left(\dfrac{z}{1-i\sqrt{3}}\right)^4 = 1$.

5. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $\left(O\,;\vec{u},\ \vec{v}\right)$, unité graphique 2 cm, placer les points A, B, C et D d'affixes respectives

$z_A = 1 - i\sqrt{3},\ z_B = -1 + i\sqrt{3},\ z_C = \sqrt{3} + i$ et $z_D = -\sqrt{3} - i$.

6. Donner une écriture complexe de la rotation r de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

7. Vérifier que : $r(A) = C$; $r(C) = B$ et $r(B) = D$.

8. En déduire que les points A, B, C et D sont situés sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 2

Une boîte contient 8 cubes indiscernables au toucher dont un rouge numéroté 1, trois rouges numérotés 2, deux verts numérotés 1, un vert numéroté 2 et un jaune numéroté 2.

A) Question de cours

Rappeler la définition de deux événements indépendants d'un espace probabilisé $(\Omega, P(\Omega), p)$.

B) Un enfant choisit au hasard et successivement sans remise deux cubes de la boîte.

On admettra que la probabilité de choisir un cube est indépendante de son numéro et de sa couleur.

1. On note : A l'événement : « Obtenir des cubes de couleurs différentes »

B l'événement : « Obtenir au plus un cube portant le numéro 2. »

a) Calculer la probabilité de A.

b) Vérifier que la probabilité de B est égale à $\dfrac{9}{14}$.

c) Les événements A et B sont-ils indépendants ?

2. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de cubes rouges tirés par l'enfant.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer l'espérance mathématique de X.

c) Calculer la variance de X.

C) L'enfant tire cette fois simultanément trois cubes de la boîte.

1. Déterminer la probabilité de l'événement C : «Obtenir au plus un cube portant le numéro 2.»
2. L'enfant répète *n* fois l'expérience, en remettant dans la boîte les cubes tirés avant de procéder au tirage suivant.
On note p_n la probabilité de l'évènement D*n* : « C est réalisé au moins une fois. »
Exprimer p_n en fonction de *n*.
3. Étudier le sens de variation de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et calculer la limite de p_n lorsque *n* tend vers $+\infty$.

Problème
Les parties A et B ne sont pas indépendantes.

Partie A

Soit *g* la fonction définie dans]0 ; +∞[par : $g(x)=\frac{x}{x-1}-\ln|x-1|$.
1. *a*) Déterminer l'ensemble de définition D_g de *g*.
b) Calculer les limites de *g* aux bornes de D_g.
(*Pour la limite au voisinage de 1, on pourra poser* : $h = x - 1$).
2. Déterminer g', la fonction dérivée de *g*, et dresser le tableau de variations de *g*.
3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α telle que : $4 < \alpha < 5$.
4. Déduire de l'étude précédente le signe de *g* sur D_g.

Partie B
On considère la fonction *f* définie par :

$$f(x)=\frac{\ln|x-1|}{x},\ \text{si } x>0$$

$$f(x)=\frac{-6e^x}{e^{2x}+3e^x+2},\ \text{si } x\leq 0.$$

1. *a*) Vérifier que *f* est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ et calculer les limites de *f* aux bornes de son ensemble de définition.
b) Préciser les droites asymptotes à ($\mathscr{C}_f$), la courbe représentative de *f* dans un repère orthonormal.
2. *a*) Étudier la continuité de *f* en 0.
b) On admet que la limite de $\frac{\ln(1-x)+x}{x^2}$ lorsque *x* tend vers 0^+ est égale à $-\frac{1}{2}$.
Montrer que la limite de $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ lorsque *x* tend vers 0^- est égale à $-\frac{1}{6}$.
Donner l'interprétation graphique de ces résultats.
3. *a*) Montrer que $f(\alpha)=\frac{1}{\alpha-1}$.
b) Calculer $f'(x)$ sur les intervalles où *f* est dérivable puis dresser le tableau de variations de *f*.
4. Construire ($\mathscr{C}_f$) dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\ \vec{j})$, unité graphique 2 cm.
On pourra prendre : $\alpha \approx 4{,}5$.
On placera les points d'abscisses –1 ; 0 ; 2 et 5.

5. *a*) Déterminer les nombres réels *a* et *b* tels que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\ ;\ -1\}$, on ait :

$$\frac{-6x}{x^2+3x+2} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x+1}.$$

b) En déduire que : $\dfrac{-6e^x}{e^{2x}+3e^x+2} = \dfrac{-12e^{-x}}{1+2e^{-x}} + \dfrac{6e^{-x}}{1+e^{-x}}$.

c) Calculer l'aire du domaine du plan limité par ($\mathscr{C}_f$), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = -\ln 2$ et $x = 0$.

Pays : Sénégal	**Année :** 2015	**Session :** normale, 1er Groupe
Série : BAC, série S_2	**Durée :** 4 h	**Coefficient :** 5

Exercice 1

Les questions **1.**, **2.** et **3.** de cet exercice sont faites chacune de quatre affirmations. Dire pour chacune de ces affirmations si elle et vraie ou fausse.

1. L'évènement contraire de « A sachant B » est :

a) $\overline{\mathrm{A}}$ sachant B *b*) A sachant $\overline{\mathrm{B}}$

c) $\overline{\mathrm{A}}$ sachant $\overline{\mathrm{B}}$ *d*) $\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B}$.

2. Soient E et F deux événements indépendants d'un même espace probabilisé, on a :

a) $p(\mathrm{E}/\mathrm{F}) = 0$ *b*) $p(\mathrm{E} \cup \mathrm{F}) = p(\mathrm{E}) \times p(\overline{\mathrm{F}}) + p(\mathrm{F})$

c) $p(\mathrm{E} \cap \mathrm{F}) = 0$ *d*) $p(\mathrm{E}/\mathrm{F}) = 1$.

3. Une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et p où $n = 4$ et $p \in]0\,;1[$.

a) Si $p = \dfrac{1}{2}$, alors $p(\mathrm{X} = 2) = 2p(\mathrm{X} = 1)$.

b) Si $p = \dfrac{1}{4}$, alors $p(\mathrm{X} = 3) > \dfrac{1}{4}$.

c) Si $p = \dfrac{1}{2}$, alors $p(\mathrm{X} > 1) = 1$.

d) Si $p(\mathrm{X} = 1) = 8p(\mathrm{X} = 0)$, alors $p = \dfrac{2}{3}$.

4. Le plan (P) est rapporté au repère orthonormé $(\mathrm{O}\,; \vec{u}, \vec{v})$. A et B sont deux points du plan (P) d'affixes respectives z_A et z_B. Considérons M et M' deux points du plan (P) distincts de A et B. Notons z et z' les affixes respectives de M et M'.

Interpréter géométriquement les résultats ci-dessous :

a) $|z - z_A| = 1$ *b*) $|z - z_A| = |z - z_B|$

c) $|z'| = |z_A - z_B|$ *d*) $\arg\left(\dfrac{z - z_A}{z - z_B}\right) = \arg\left(\dfrac{z' - z_A}{z' - z_B}\right) \quad [\pi]$.

Exercice 2

1. Soit $p(z) = z^3 + 3z^2 - 3z - 5 - 20i$, $z \in \mathbb{C}$.

a) Démontrer que $2 + i$ est une racine de $p(z)$.

b) En déduire les solutions de l'équation $p(z) = 0$ dans $\mathbb{C}$.

2. Dans le plan (P) rapporté au repère orthonormé direct $(\mathrm{O}\,; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité 1 cm, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $2 + i$, $-1 - 2i$ et $-4 + i$.

a) Placer les points A, B et C puis calculer les distances AB et BC.

b) Démontrer que $\arg\left(\dfrac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right) = \left(\overrightarrow{\mathrm{BA}}, \overrightarrow{\mathrm{BC}}\right) \quad [\pi]$.

c) En déduire une mesure en radian de l'angle $\left(\overrightarrow{\mathrm{BA}}, \overrightarrow{\mathrm{BC}}\right)$.

d) Déduire de tout ce qui précède la nature du triangle ABC.

3. Soit r la rotation qui laisse invariant le point B et qui transforme A en C.

a) Montrer que l'application f associée à r est définie par : $f(z) = iz - 3 - i$.

b) Préciser les éléments géométriques caractéristiques de r.

4. Soit $\mathrm{T} : \mathrm{M}(z) \mapsto \mathrm{M}'(z')$ telle que $z' = i\alpha^2 z + \alpha,\ \alpha \in \mathbb{C}$.

a) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles T est une homothétie de rapport 2.

b) Déterminer les éléments géométriques caractéristiques de T pour le nombre complexe α vérifiant $|\alpha| = \sqrt{2}$ et $\arg\alpha = -\frac{\pi}{4}$.

5. On considère la transformation $g = r\mathrm{o}\mathrm{T}$. On suppose dans ce qui suit que $\alpha = 1 - i$.

a) Montrer que l'application h associée à g est définie par : $h(z) = 2iz - 2$.

b) Donner les éléments géométriques caractéristiques de g.

Exercice 3

Au Sénégal, une entreprise veut vérifier l'efficacité de son service de publicité. Elle a relevé chaque mois durant une période de 6 mois les sommes X consacrées à la publicité et le chiffre d'affaires constaté Y (X et Y sont en milliards de FCFA).

On donne le tableau ci-dessous :

Rang du mois	1	2	3	4	5	6
X	1,2	0,5	1	1	1,5	1
Y	1	4	100	125	148	181

Les résultats seront donnés au centième près.

Le détail des calculs n'est pas indispensable. On précisera les formules utilisées.

1. Calculer le coefficient de corrélation linéaire de X et Y.

2. *a*) Déterminer l'équation de la droite de régression de Y en X.

b) Déterminer la somme qu'il faut investir en publicité si l'on désire avoir un chiffre d'affaires de 300 milliards si cette tendance se poursuit.

Exercice 4

A) **1.** En utilisant une intégration par parties, calculer pour tout nombre réel α :

$\mathrm{I}(\alpha) = \int_0^\alpha e^t (t+2)\,dt.$

En déduire I(x).

2. Soit k une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Considérons la fonction h telle que

$h(x) = k(x)e^{-x},\ \forall x \in \mathbb{R}.$

On se propose de déterminer la fonction h de façon à ce qu'elle vérifie les conditions suivantes, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} h'(x) + h(x) = x + 2 \\ h(0) = 2 \end{cases}.$$

a) Vérifier que : $k'(x) = (x+2)e^x$.

b) En déduire k puis h.

B) I) **1.** Étudier les variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction g définie par : $g(x) = x + 1 + e^{-x}$.

2. En déduire que $g(x)$ est strictement positif.

II) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \ln\left(x + 1 + e^{-x}\right)$.

($\mathscr{C}_f$) est sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\vec{i},\ \vec{j}\right)$.

1. Étudier les variations de f puis dresser son tableau de variations.

2. Pour tout x strictement positif, on note M, le point de la courbe de la fonction logarithme népérien d'abscisse x et N le point de ($\mathscr{C}_f$) de même abscisse.

a) Démontrer que $0 < \overline{\mathrm{MN}} < \ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right)$.

b) Quelle est la limite de $\overline{\mathrm{MN}}$ quand x tend vers $+\infty$?

3. *a*) Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -x + \ln\left(xe^{x} + e^{x} + 1\right)$.

b) En déduire que ($\mathscr{C}_f$) admet une asymptote oblique (Δ) au voisinage de $-\infty$ et déterminer la position de ($\mathscr{C}_f$) par rapport à (Δ) pour $x < -1$.

4. Construire ($\mathscr{C}_f$) et (Δ) dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\vec{i},\ \vec{j}\right)$.