UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR
OFFICE DU BACCALAUREAT
E. mail : office@ucad.edu.sn
site web : officedubac.sn



2024T05NA0129
Durée: 04 heures
Série : STIDD– Coef. 5
Epreuve du 1er groupe

# MATHEMATIQUES

## EXERCICE 1 (05,5 points)

1. On considéré le polynôme $P$ de la variable complexe $z$, défini par :

$$P(z) = z^3 + (14 - i\sqrt{2})z^2 + (74 - 14\,i\sqrt{2})z - 74i\sqrt{2}.$$

a) Déterminer un nombre réel $\beta$ tel que $i\beta$ soit solution de l'équation $P(z) = 0$. (0,75 point)

b) Trouver deux nombres réels $a$ et $b$ tels que, pour tout nombre complexe $z$, on ait :

$$P(z) = (z - i\sqrt{2})(z^2 + az + b).$$ (0,75 point)

c) Résoudre alors dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation $P(z) = 0$. (01 point)

2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\,\vec{u}, \vec{v})$.
*On prendra 1 cm pour unité graphique.*

a) Placer les points $A$, $B$ et $I$ d'affixes respectives $z_A = -7 + 5i$, $z_B = -7 - 5i$ et $z_I = i\sqrt{2}$.
(0,75 point)

b) Soit $C$ l'image du point $I$ par la rotation de centre $O$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.
Montrer que l'affixe $z_C$ de $C$ est : $z_C = 1 + i$. Placer $C$. (0,5 point)

c) Soit $D$ le point tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.
Montrer que l'affixe $z_D$ de $D$ est : $z_D = 1 + 11i$. Placer $D$. (0,5 point)

3. On pose : $Z = \frac{z_A - z_C}{z_D - z_B}$.

a) Ecrire $Z$ sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique. (0,5 point)

b) Justifie alors que les droites $(AC)$ et $(BD)$ sont perpendiculaires, puis en déduire la nature exacte du quadrilatère $ABCD$. (0,75 point)

## EXERCICE 2 (05 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points suivants :
$A(1, -1, 1)$, $B(0, 0, 1)$, $C(-1, 0, 3)$ et $D(-2, 0, 1)$.

1.a) Démontrer que les points $A$, $B$ et $C$ ne sont pas alignés. (0,5 point)

b) Déterminer une équation cartésienne du plan $(ABC)$. (0,75 point)

c) Vérifier que le point $D$ n'appartient pas au plan $(ABC)$. (0,5 point)

d) Calculer le volume $V$ du tétraèdre $ABCD$. (01 point)

2. On considère l'ensemble $(S)$ des points $M(x, y, z)$ tel que $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 4z - 1 = 0$ et le plan $(P)$ d'équation $2x + 2y + z - 1 = 0$.

a) Montrer que $(S)$ est une sphère on précisera son centre $I$ et son rayon. (0,5 point)

b) Justifier que l'intersection $(S) \cap (P)$ de la sphère $(S)$ et du plan $(P)$ est un cercle qu'on notera $(C)$.

c) Donner une représentation paramétrique de la droite $(\Delta)$ passant par $I$ et perpendiculaire au plan $(P)$.
(0,75 point)

d) Déterminer alors le centre et le rayon du cercle $(C)$. (01 point)

**PROBLEME** **(09,5 points)**

Soit $f$ la fonction définie par : $f(x) = x(\ln^2 x - 3)$ et $f(0) = 0$.

On note $(C)$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

1. a) Déterminer le domaine de définition de $f$. **(0,5 point)**

   b) Montrer que $f$ est continue sur son ensemble de définition. **(0,75 point)**

   c) Etudier la dérivabilité de $f$ à droite en 0 puis interpréter géométriquement le résultat. **(0,75 point)**

2. a) Calculer la limite de $f$ en $+\infty$. **(0,5 point)**

   b) Etudier la branche infinie de la courbe $(C)$ en $+\infty$. **(0,5 point)**

3. a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\ln^2 x + 2\ln x - 3 \leq 0$. **(0,75 point)**

   b) Déterminer l'expression de la dérivée $f'$ de $f$ sur l'intervalle $]0\,,+\infty[$. **(0,5 point)**

   c) Déduire des questions précédentes le tableau de variations de $f$. **(0,5 point)**

3. a) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = 0$. **(0,5 point)**

   b) Ecrire une équation de tangente $(T)$ à $(C)$ au point d'abscisse $x = e^{\sqrt{3}}$. **(0,5 point)**

4. Tracer minutieusement $(C)$, $(T)$ ainsi que la tangente à $(C)$ au point d'abscisse 0. **(01 point)**

5. Soit $g$ la restriction de $f$ sur l'intervalle $[e, +\infty[$.

   a) Montrer que $g$ est une bijection de $[e, +\infty[$ vers intervalle $J$ à préciser. **(0,5 point)**

6. Construire $(C')$, courbe représentative l'application réciproque $g^{-1}$ de $g$, dans le plan muni du repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. **(0,75 point)**

7. Montrer que la fonction $F$ définie par $F(x) = \frac{1}{2}x^2\left(\ln^2 x - \ln x - \frac{5}{2}\right)$ est une primitive de $f$ sur $]0, +\infty[$. **(0,5 point)**

8. Calculer en unité d'aire l'aire du domaine plan délimitée par la courbe $(C)$, l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = e^{-\sqrt{3}}$ et la droite d'équation $x = e^{\sqrt{3}}$. **(01 point)**